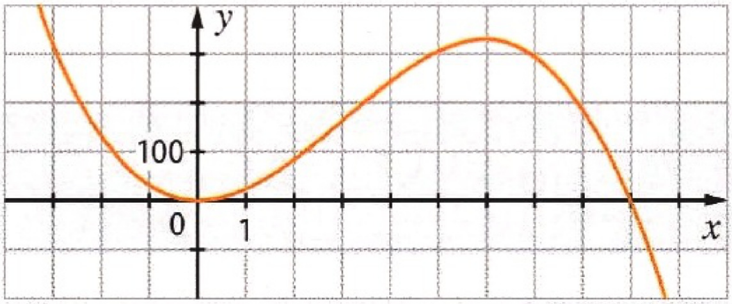
4. Énoncés des exercices

Exercice 13.1 On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer la convexité de f par lecture graphique.
2. Préciser les éventuels points d'inflexion de f

Exercice 13.2 La directrice d'un parc de loisirs a créé pour son site web un logo symbolisant une rampe de lancement. Pour cela, elle a construit dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par :

$$f(x) = 0,125x^3 - 0,75x^2 + 4$$

1. (a) Déterminer $f'(x)$
   (b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en deux points une tangente horizontale
   (c) Déterminer le signe de $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $[0; 5]$.
2. (a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.
   (b) Déterminer une équation de la tangente T en ce point I.
   (c) Que peut-on dire de la position relative de T et de $\mathscr{C}_f$?

Exercice 13.3 On souhaite démontrer que pour tout réel x positif et tout entier naturel n non nul,

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

1. Vérifier rapidement que cette inégalité est vraie pour $n = 1$
2. On suppose désormais $n \geqslant 2$, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = (1 + x)^n$.
   Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Conclure.

Exercice 13.4 On injecte à un patient un médicament, puis on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On admet que la concentration est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial , et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

Partie A - approche théorique

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Montrer que $\forall x \in [0; 15]$,
   $$f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$$
5. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Partie B - Interprétation

A l'aide des résultats de la partie A, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à $0,1$ gramme par litre. Pendant combien de temps la médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?